Educare alla razionalità, in ricordo di Paolo Gentilini

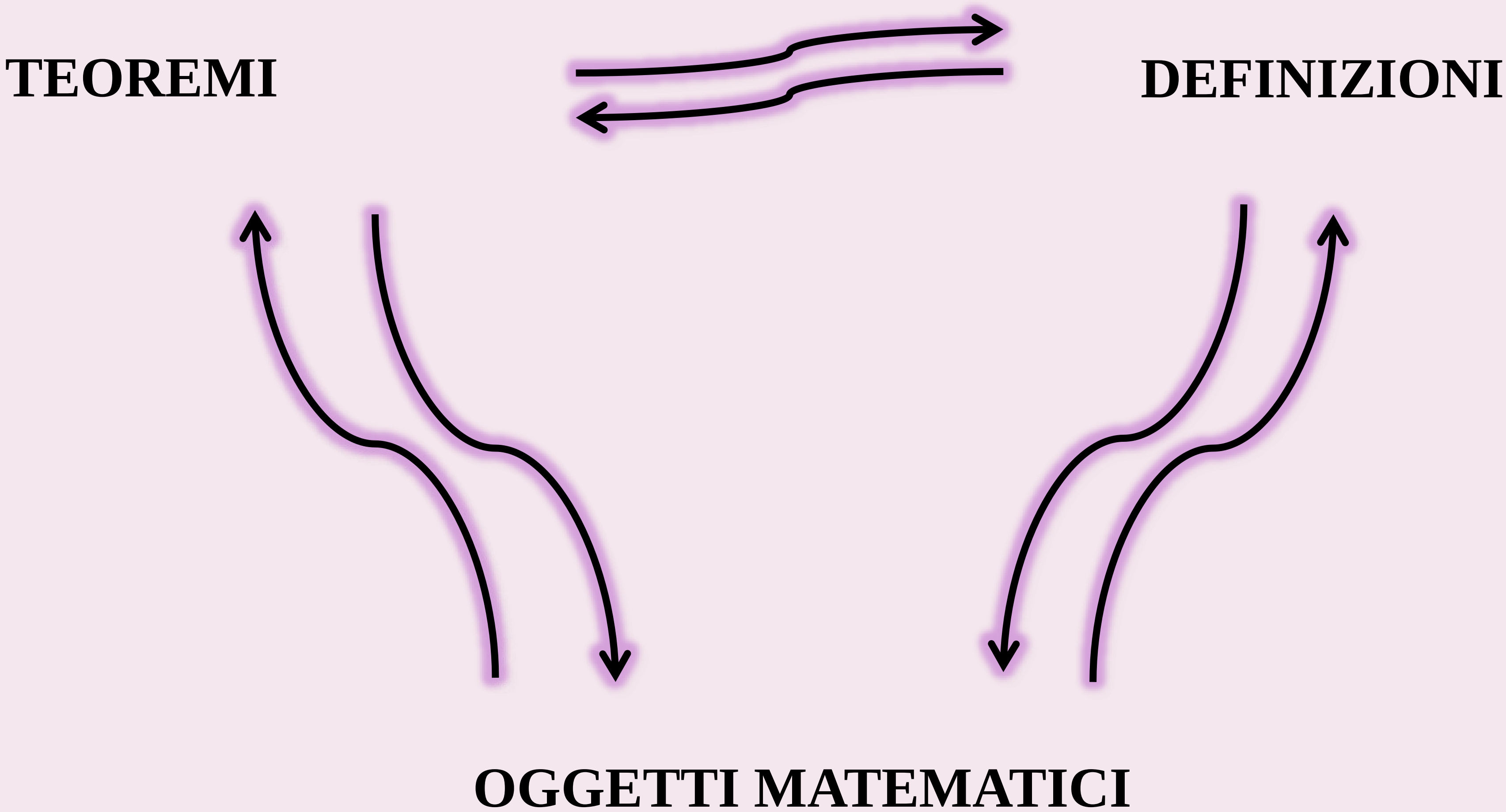
Sestri Levante, 9-11 giugno 2016

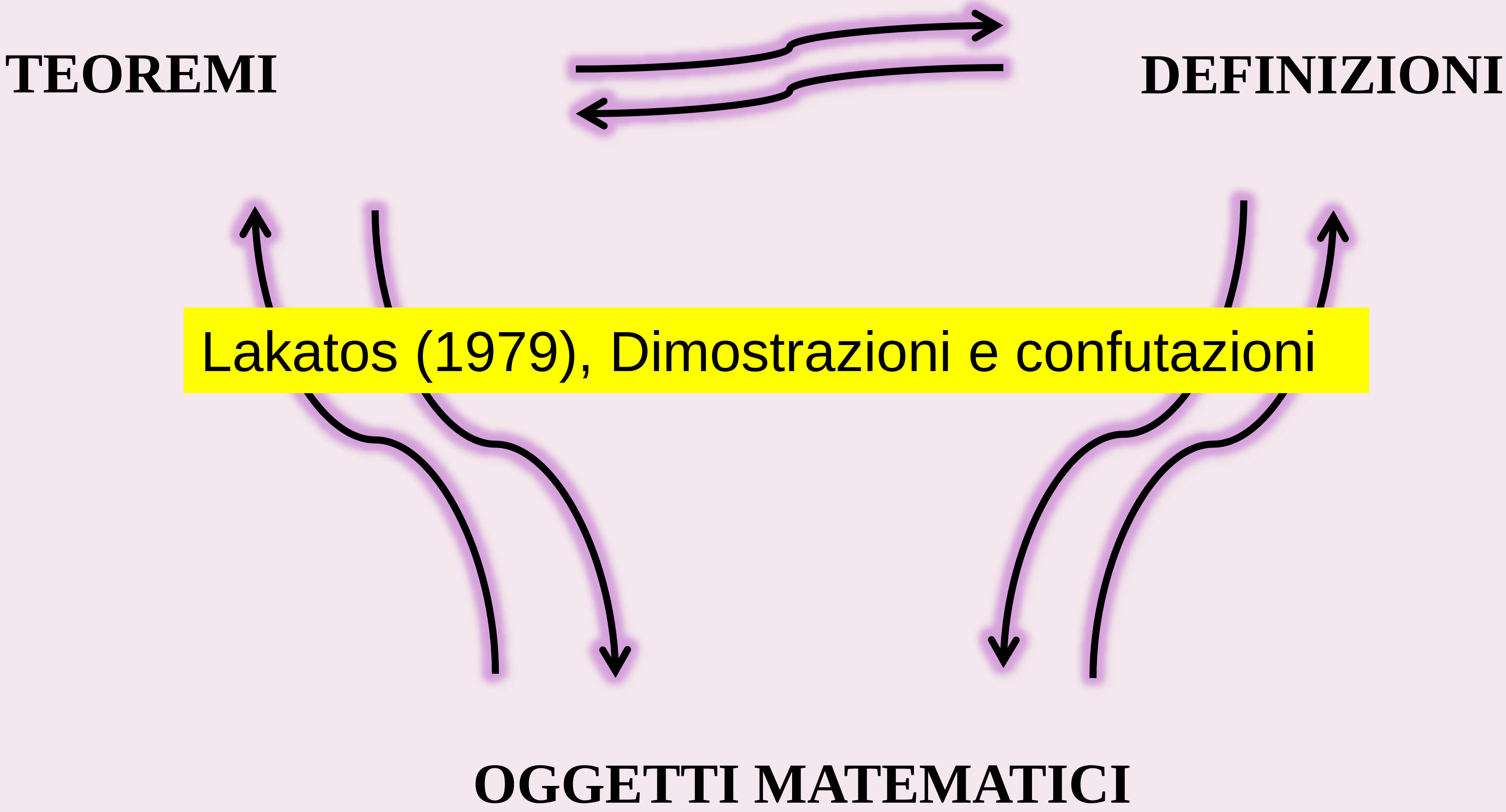
Congetturare e argomentare tra esempi e contro-esempi

Samuele Antonini
Università di Pavia

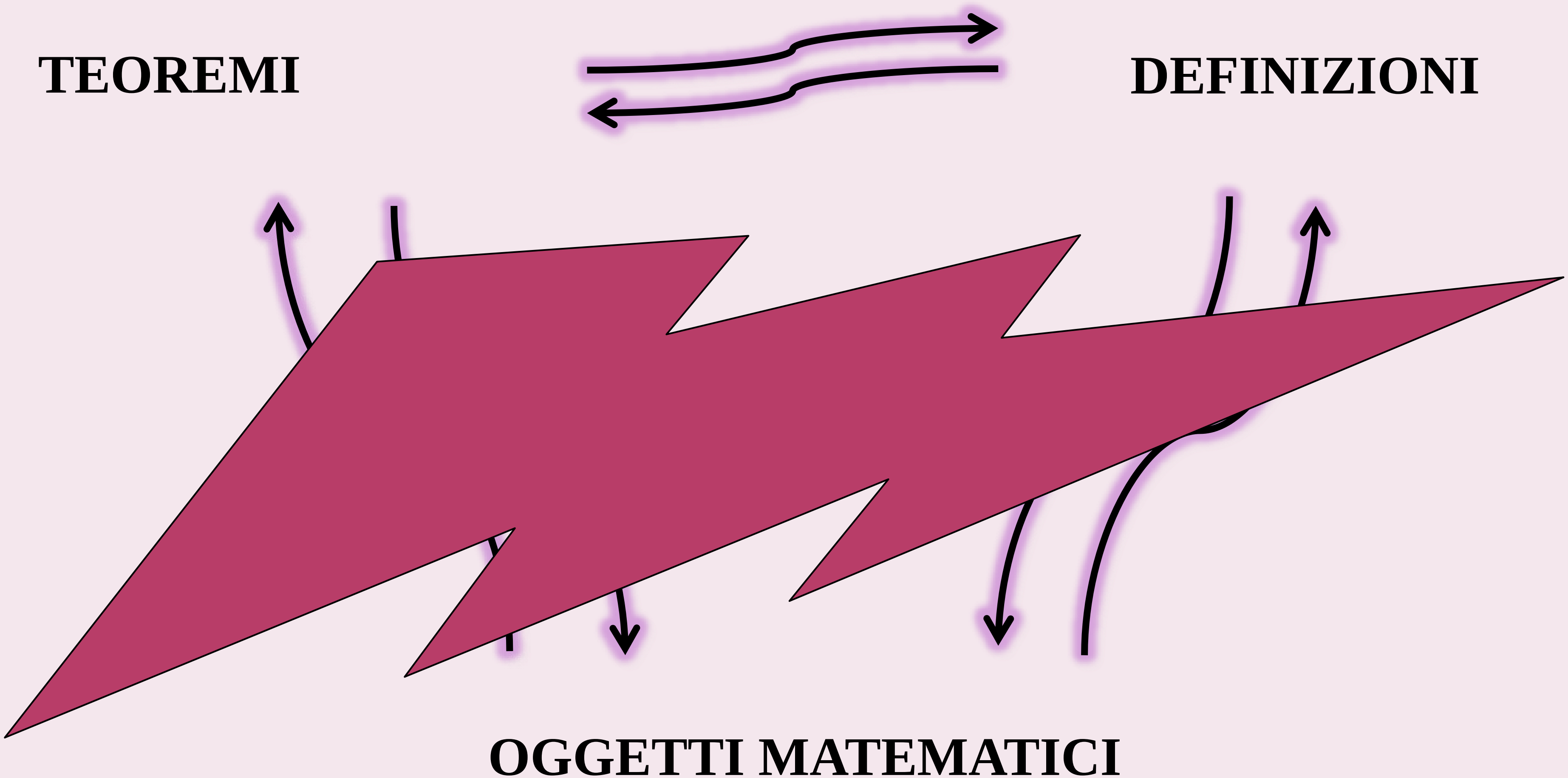
TEOREMI **DEFINIZIONI**

OGGETTI MATEMATICI


TEOREMI
DEFINIZIONI
OGGETTI MATEMATICI



Lakatos (1979), Dimostrazioni e confutazioni


TEOREMI
DEFINIZIONI
OGGETTI MATEMATICI

TEOREMI

Enunciato: condensazione di significati vs. evaporazione di significati

- Bisogno di evidenza empirica
- Generalità di enunciati vs. controesempio come eccezione
- Necessità delle ipotesi, limiti della tesi (controesempi)
- Ruolo di esempi e controesempi nella produzione di congetture, argomentazioni, dimostrazioni

OGGETTI MATEMATICI

DEFINIZIONI

- Ruolo degli esempi nella formulazione di definizioni (punto di vista epistemologico), e acquisizione di concetti (punto di vista cognitivo)
- Ruolo delle definizioni per classificare gli oggetti matematici (gallerie di esempi e non-esempi)

OGGETTI MATEMATICI

DEFINIZIONI

Concept image – concept definition
Effetto prototipo

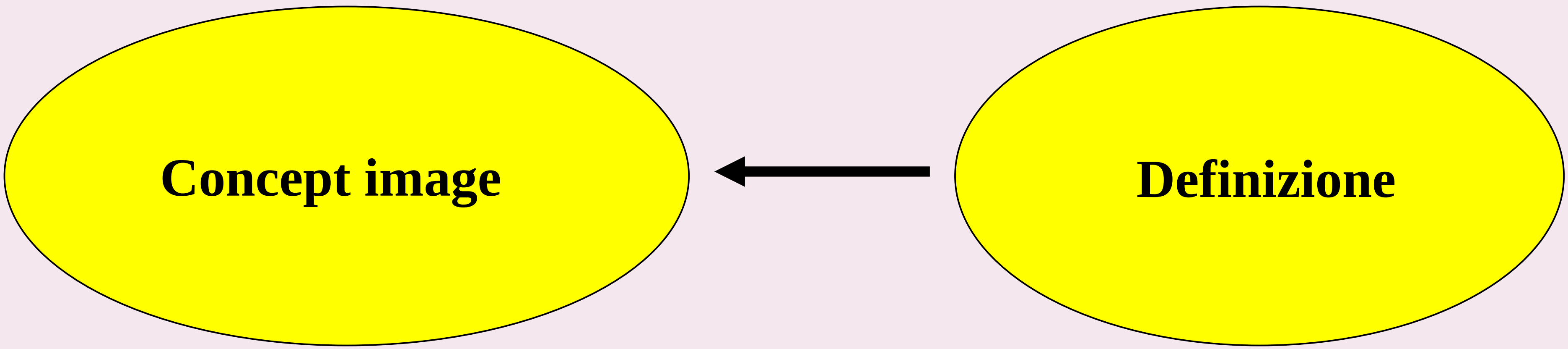
- Ruolo degli esempi nella formulazione di definizioni (punto di vista epistemologico), e acquisizione di concetti (punto di vista cognitivo)
- Ruolo delle definizioni per classificare gli oggetti matematici (gallerie di esempi e non-esempi)

OGGETTI MATEMATICI

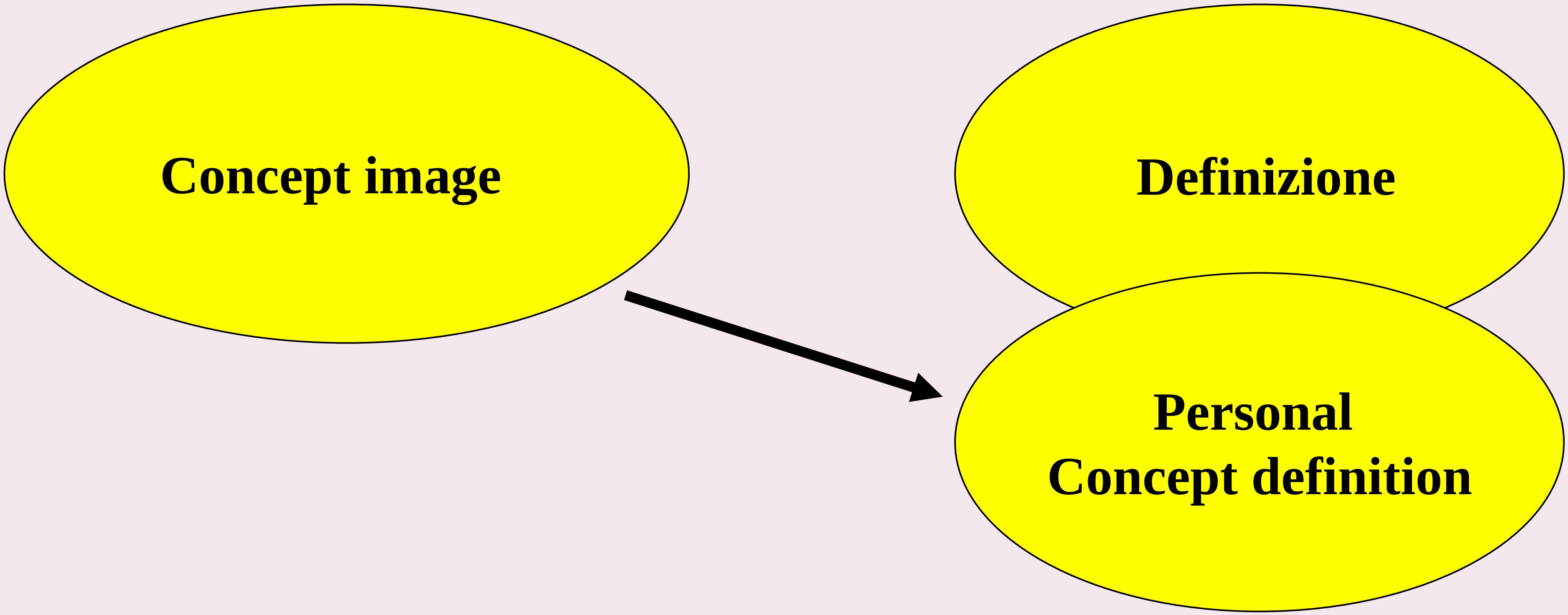
Concept image

Definizione

Ci aspettiamo………



MA…

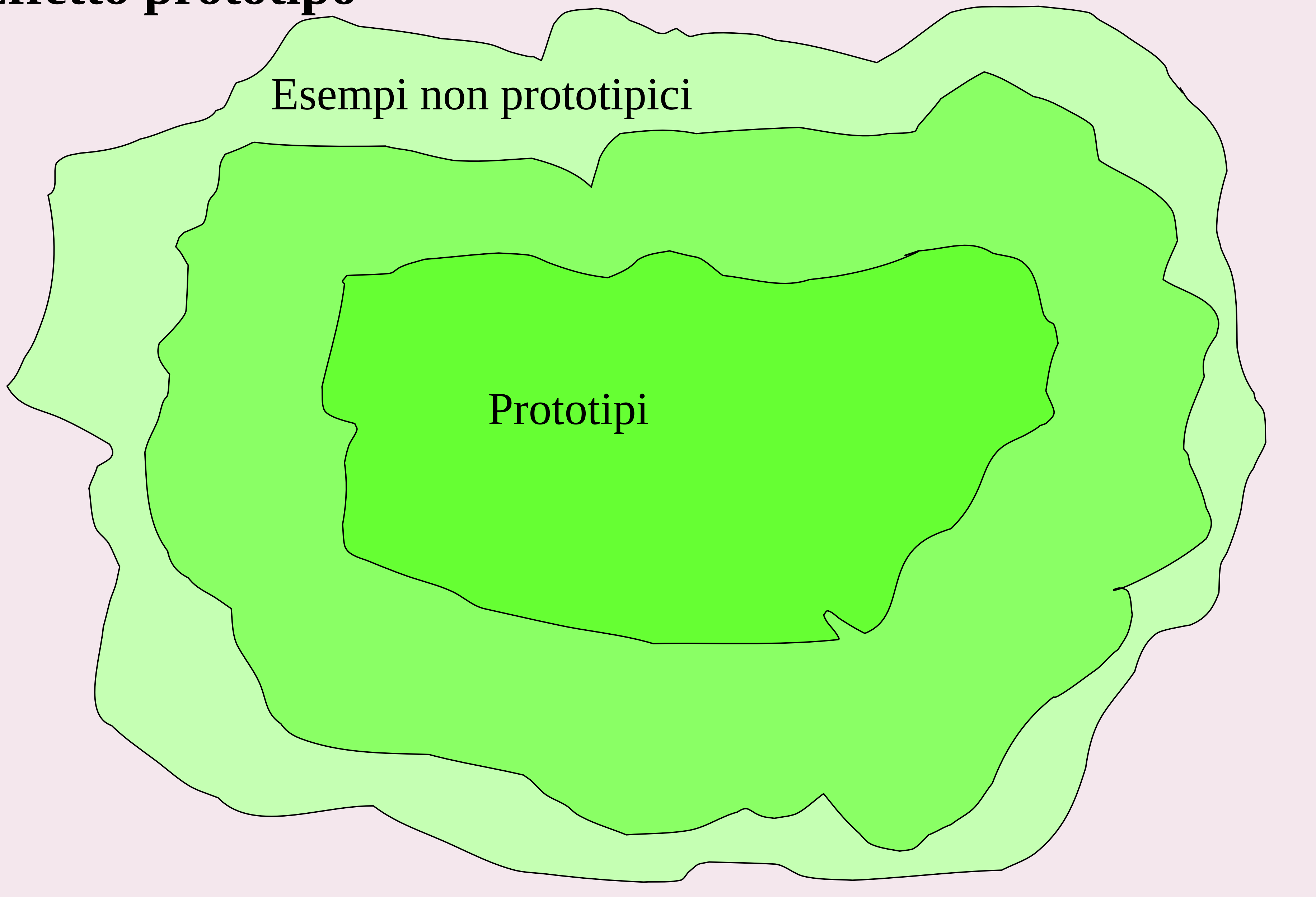


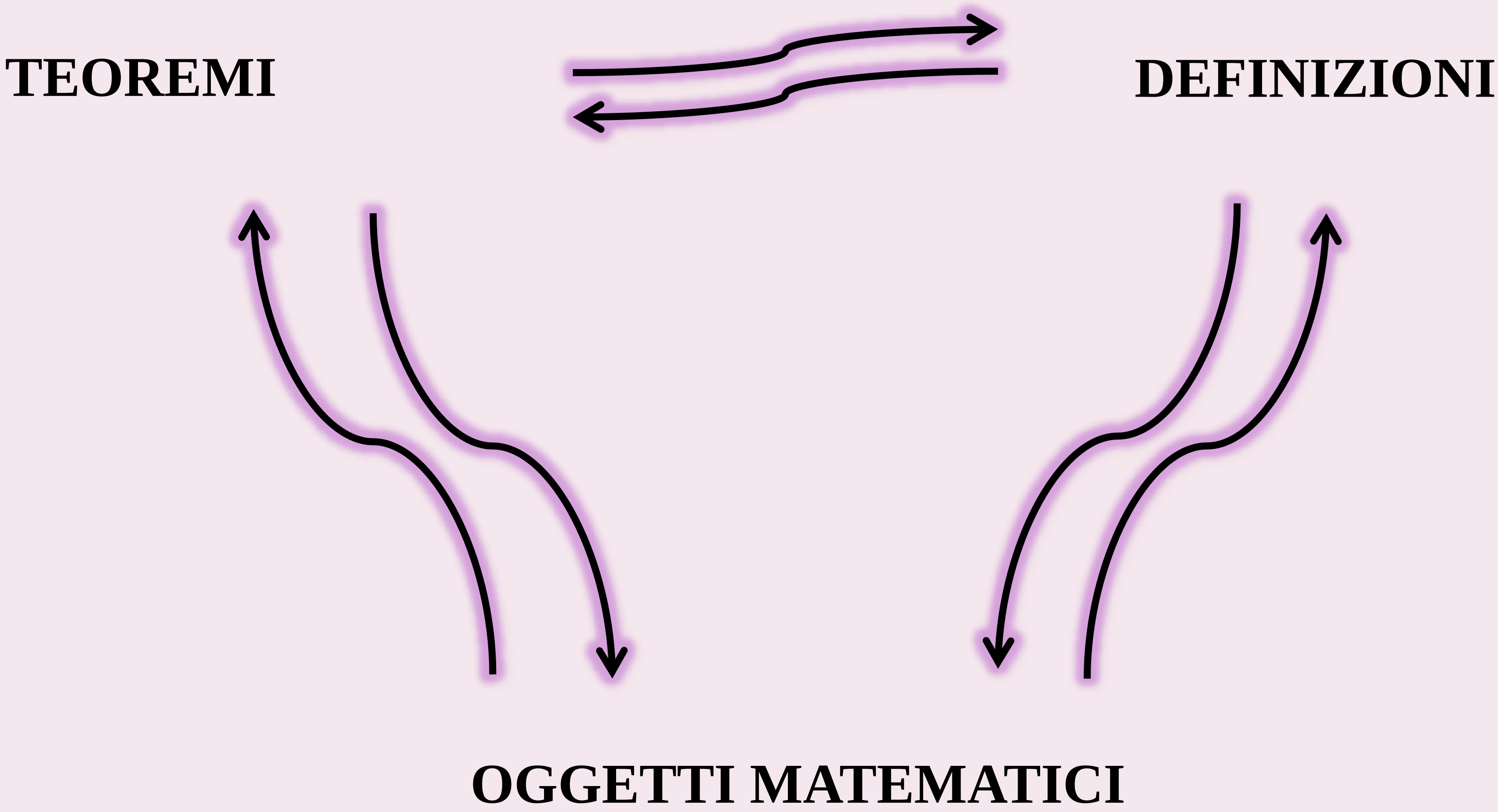
Esempio

non so se è una funzione perché non so se questo grafico ha una formula, se non ce l'ha, non è una funzione (da Tall & Vinner)

Punto di vista cognitivo
Effetto prototipo

Categorie cognitive
(Lakoff, 1987, Rosch, 1977)




TEOREMI
DEFINIZIONI
OGGETTI MATEMATICI

Dalle INDICAZIONI NAZIONALI

***Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio**, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che si fa. Il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interni alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento*. (p. 27)

In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. **[…] (p. 49)**

Dalle INDICAZIONI NAZIONALI

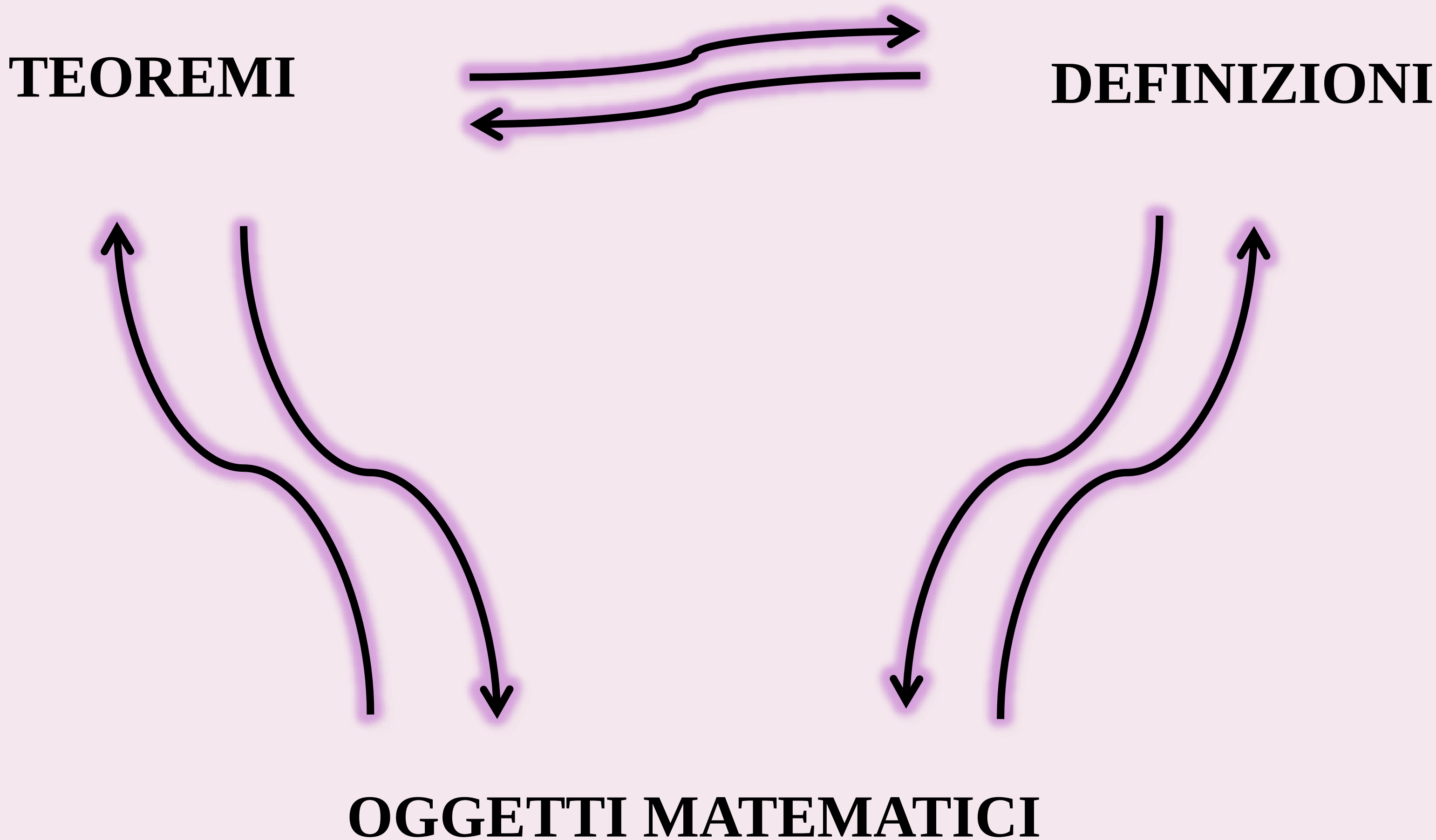
Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il «pensare» e il «fare» *e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall’uomo, eventi quotidiani* (p. 49)

Dalle INDICAZIONI NAZIONALI

Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. **(p. 49)**

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e struttura che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo. **(p. 49)**

Passiamo all'azione



Passiamo all'azione

Congetturare
Argomentare
Dimostrare

DEFINIZIONI

OGGETTI MATEMATICI

Passiamo all’azione

Congetturare
Argomentare
Dimostrare

Definire

OGGETTI MATEMATICI

Passiamo all’azione

Congetturare
Argomentare
Dimostrare

Definire

Costruire, rappresentare, trasformare oggetti matematici

Passiamo all’azione

Congetturare
Argomentare
Dimostrare

Definire

Costruire, rappresentare, trasformare oggetti matematici

Raccolte di esempi… per matematici…

Gelbaum & Olmsted, *Counterexamples in analysis*, 1964

Capobianco & Molluzzo, *Examples and Counterexamples in Graph Theory*, 1978

Khaleelulla, *Counterexamples in topological vector spaces*, 1982

Romano & Siegel, *Counterexamples in probability and statistics*, 1986

Fornaess & Stensones , *Lectures on counterexamples in several complex variables*, 1987

Stoyanov, *Counterexamples in probability*, 1987

Gelbaum & Olmsted, *Theorems and counterexamples in Mathematics*, 1990

Wise & Hall, *Counterexamples in probability and real analysis*, 1993

Steen & Seebach, *Counterexamples in topology*, 1995

Generare esempi: strumento diagnostico e strumento di apprendimento/insegnamento

Chiedere di produrre un esempio è uno strumento di ricerca che apre una *finestra (window)* nella mente dello studente (Zazkis & Leikin, 2007, p. 15)

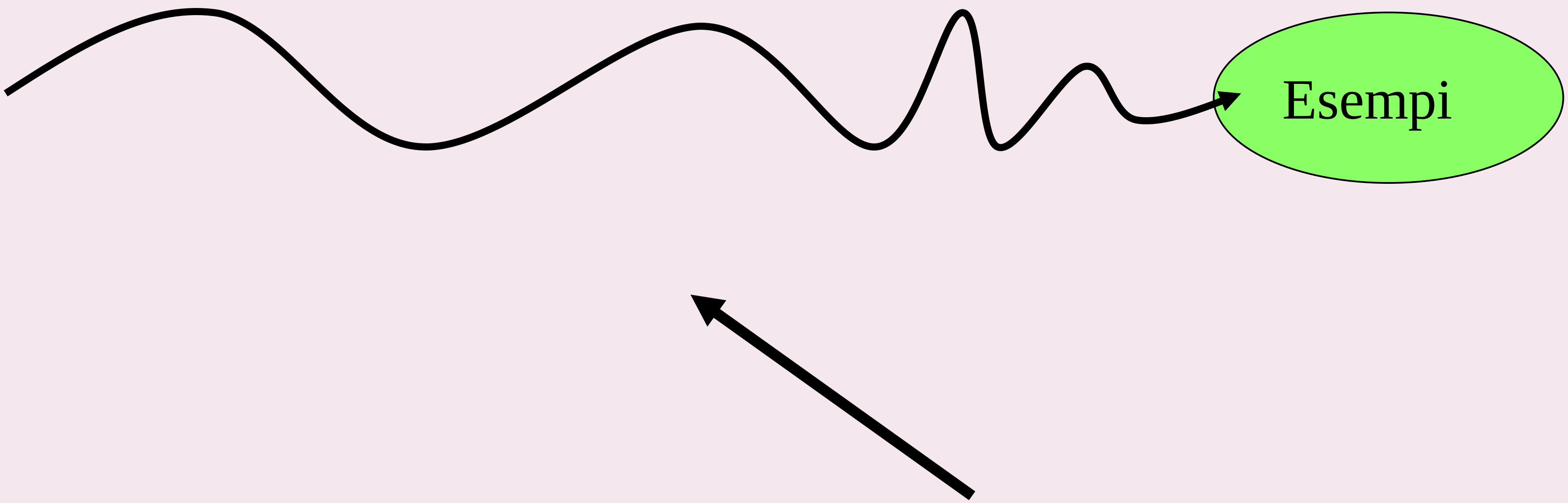
Gli esempi generati dagli studenti *riflettono* (*mirror*) le loro concezione degli oggetti matematici in gioco (p. 15).

Generare esempi: miglior strategia per la comprensione iniziale di un concetto…(Dahlberg & Housman, 1997, *p. 283)*

…più efficace chiedere agli studenti di **generare i propri esempi** prima di fornire i nostri (Dahlberg & Housman, 1997, p. 297-298)

Esempi

Processi



Osservazione e analisi di processi

Esperti (dottorandi in matematica)

Osservazione di esperti per interpretare difficoltà e blocchi degli studenti in termini di processi non attivati.

- Studenti universitari (corsi di laurea di mat, fisica, inform, ing)
- Studenti di scuola superiore

Osservazione e analisi di processi

Esperti (dottorandi in matematica)

Tentativi ed errori
Trasformazioni
Analisi

Osservazione di esperti per interpretare difficoltà e blocchi degli studenti in termini di processi non attivati.

- Studenti universitari (corsi di laurea di mat, fisica, inform, ing)
- Studenti di scuola superiore

Franco (laureando in fisica, vecchio ordinamento)

Dare un esempio, se possibile, di operazione binaria commutativa e non associativa

Franco (laureando in fisica, vecchio ordinamento)

Dare un esempio, se possibile, di operazione binaria commutativa e non associativa

Quali operazioni conosco? La somma, la moltiplicazione... ma non vanno bene […] Il prodotto di matrici!... No, no, è associativo... e non è neanche commutativo. Vediamo... la divisione non è associativa. No, non va bene, non è commutativa... L'esponenziale! No, non è un'operazione binaria... Beh, se prendo a^b è binaria... ma non commuta, quindi... Quali altre operazioni ci sono?

Sandro (dottorando in matematica)

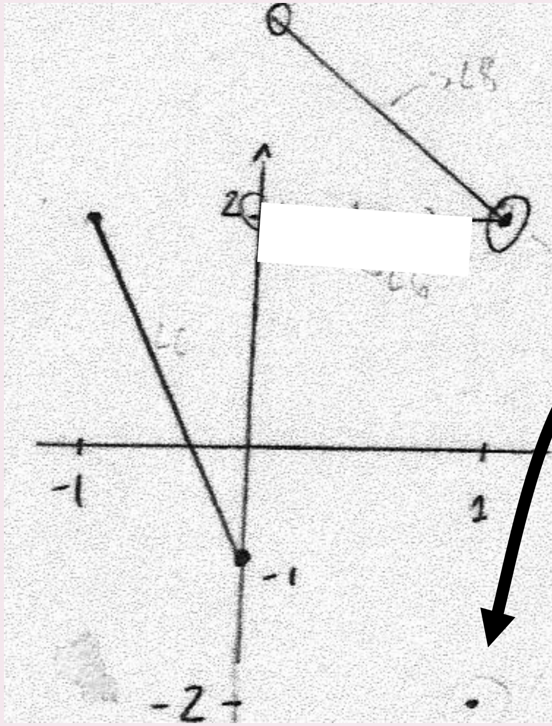
[…] Allora, un’operazione non associativa è la divisione: $a*b=a/b$. Beh, dovrei togliere lo 0, semmai dopo sistemo l’insieme di definizione. Dunque, il problema è che non è commutativa. Posso comunque sfruttarla?[...]

Ah! La posso rendere commutativa simmetrizzandola!

$a*b=a/b+b/a$ ...

Letizia (laurea specialistica in matematica)

Dai un esempio, se possibile, di funzione iniettiva $f:[-1,1]\to R$,
tale che $f(0)= -1$ e $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = 2$



Letizia: *stavo pensando, mi posso definire la mia funzione in x = 1 dandole un valore qualsiasi? No, perché se definisco f(1) = 3 allora il limite per x che tende a 1 della mia funzione è uguale a 3.*

Se definisco f(1)= -2, in modo che sia iniettiva, allora il mio problema adesso è vedere quanto vale il limite per x che tende a 1 di questa funzione. Non lo so quanto vale, voglio dire ***guardando il grafico direi che il limite vale –2 e non 2.***

Intervist. : *prova a pensare alla definizione di limite*

Letizia: *ah ma c'è l'intorno bucato! Voglio dire, ti scrivo la definizione di limite.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - \overset{\ell}{\cancel{f(x_0)}}| < \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$$

Intervist. : *prova a pensare alla definizione di limite*

Letizia: *ah ma c'è l'intorno bucato! Voglio dire, ti scrivo la definizione di limite.*

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - \overset{l}{\cancel{f(x_0)}}| < \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$

devo escludere il punto verso cui tende la x, quindi va bene, la funzione che ho disegnato va bene, tende a 2 per x che tende a 1.

che bello questo esercizio! Finalmente ho capito perché nella definizione di limite bisogna escludere il valore del punto, ho capito il significato di intorno bucato del punto!

Esempio: una attività…..

PRODUZ/TRASF. DI ESEMPI ⟷ **CONGETTURE ARGOMENTAZIONI**

-Estensione del repertorio di esempi (familiarità con gli oggetti)

-Produzione e trasformazione di oggetti matematici

-Produzione di congetture, argomentazioni, dimostrazioni

IL CONTESTO

Due classi quinte di un Liceo Scientifico tradizionale

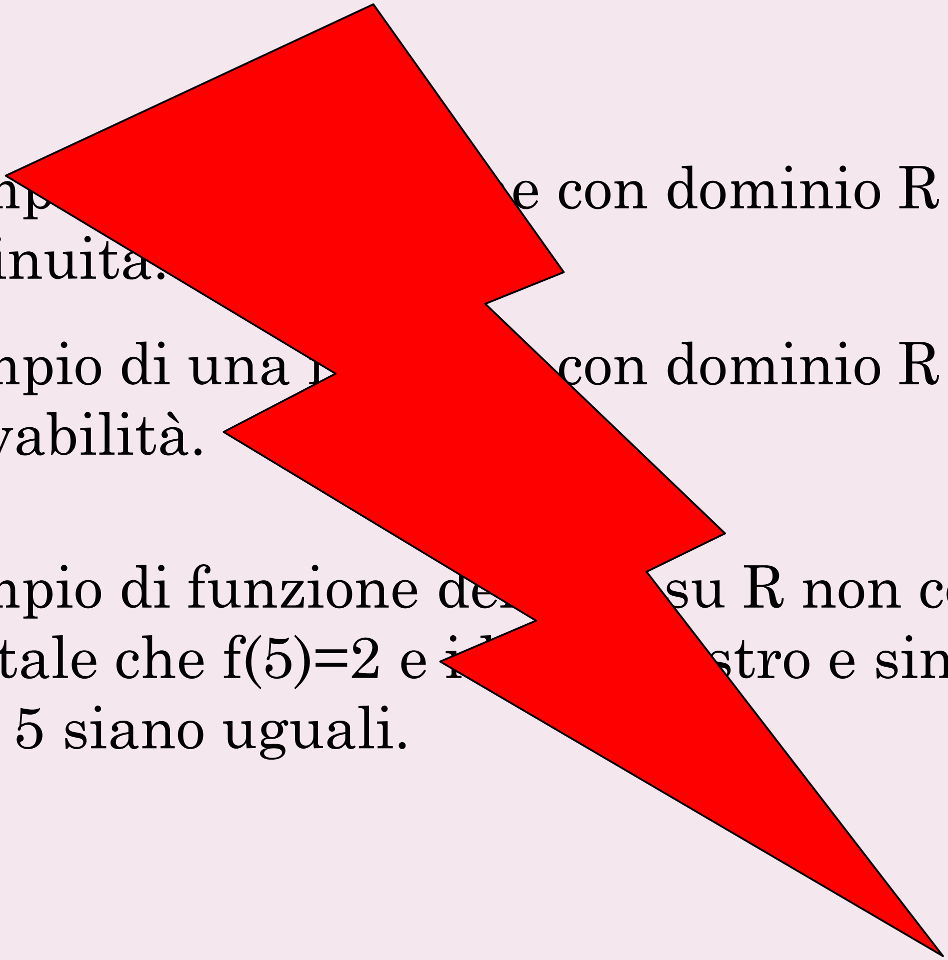
Attività svolta all’interno di una normale programmazione didattica
Periodo: marzo

Precedentemente trattati in modo tradizionale: concetto di funzione, limiti e derivabilità

Verifica iniziale

- Fai un esempio di una funzione con dominio R e con 2 punti di non continuità.
- Fai un esempio di una funzione con dominio R e con 2 punti di non derivabilità.
- Fai un esempio di funzione definita su R non continua nel punto x=5, tale che f(5)=2 e i limiti destro e sinistro per x che tende a 5 siano uguali.

Verifica iniziale



- Fai un esemp[illegible]e con dominio R e con 2 punti di non continuità.
- Fai un esempio di una f[illegible]con dominio R e con 2 punti di non derivabilità.
- Fai un esempio di funzione de[illegible]su R non continua nel punto x=5, tale che f(5)=2 e i[illegible]stro e sinistro per x che tende a 5 siano uguali.

DISASTRO !!

L’attività

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione/trattamento di esempi
- Riflessione sui processi

Fai l’esempio, se possibile, di 2 grafici di funzione e di 2 funzioni in forma algebrica per ognuno dei seguenti domini:

$(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$;[-1,5]; (-1,5); [-1,5); (-1,5];

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione/trattamento di esempi
- Riflessione sui processi

Fai l’esempio di 2 grafici di funzione e di 2 funzioni in forma algebrica**, i più strani possibile**, per ognuno dei domini seguenti

[-1,5]; (-1,5); [-1,5); (-1,5]; $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(5;+\infty\right)$

Se possibile fai due esempi di funzione **continua** su [-3,4) senza massimo, almeno una anche limitata

•Produzione di esempi non prototipici

SCHEDA: Se possibile disegna 2 grafici di una funzione limitata inferiormente ma non superiormente, con dominio $[0, +\infty)$, senza asintoti verticali e per la quale non esiste il limite per x che tende a $+\infty$.

Fai l'esempio di 2 grafici di funzione e di 2 funzioni in forma algebrica, **i più strani possibile**, per ognuno dei domini seguenti
[-1,5]; (-1,5); [-1,5); (-1,5];

•Produzione di "controesempi" a potenziali "enunciati impliciti"

Se possibile fai due esempi di funzione **continua** su [-3,4) senza massimo, almeno una anche limitata

•Produzione di esempi non prototipici

SCHEDA: Se possibile disegna 2 grafici di una funzione limitata inferiormente ma non superiormente, con dominio $[0, +\infty)$, senza asintoti verticali e per la quale non esiste il limite per x che tende a $+\infty$.

Se possibile costruisci due esempi di funzione **continua** in [4,6] senza minimo.

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione/trattamento di esempi
- Riflessione sui processi

1) Fai 2 esempi (in forma grafica e algebrica) di funzioni periodiche che verificano le seguenti proprietà:

- Non limitata;
- Limitata;
- Con periodo 5π.

2) Modifica le funzioni del punto 1) affinché diventino:

- Periodica di periodo 8π;
- Non periodica.

•Trasformazione/trattamento di esempi

•Riflessione sui processi

(dopo alcuni problemi)
Descrivere il procedimento e spiegare ad uno studente di un’altra quinta liceo scientifico come trovare gli esempi di funzione richiesti…..

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione/trattamento di esempi
- Riflessione sui processi

Dai processi di produzione di esempi alla congettura e argomentazione

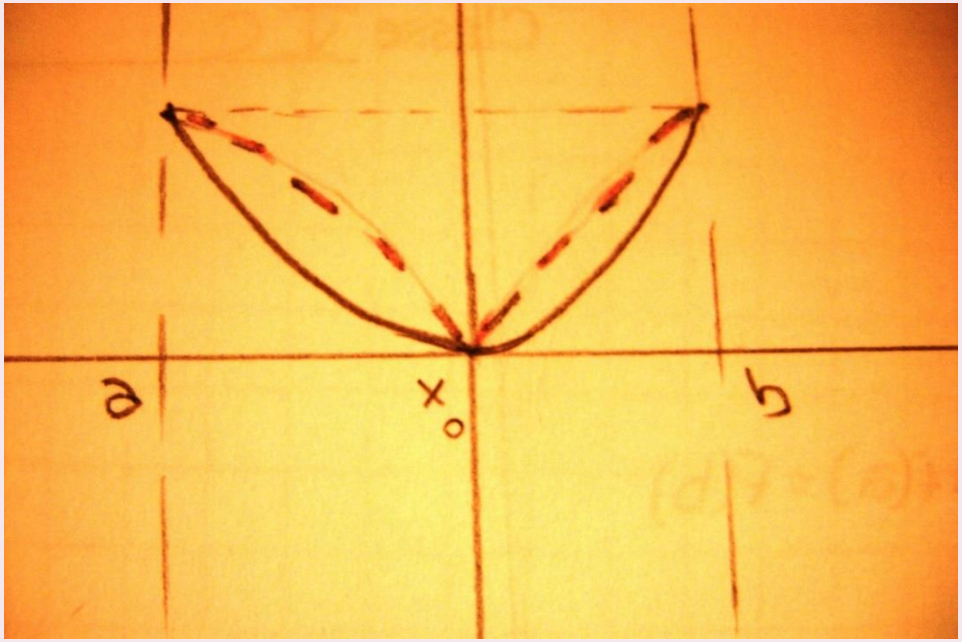
Costruire 15 funzioni definite su un intervallo $[a,b]$ tali che $f(a)=f(b)$, di cui 5 continue, 5 non continue e 5 non derivabili.

Fai un esempio di $f(x)$ definita su $[a,b]$ con $f(a)=f(b)$ e:

a) $f'(x)>0$ su (a,b);
b) $f'(x)=0$ su (a,b);
c) $f'(x)<0$ su (a,b);
d) $f'(x)>0$ su $(a, (b+a)/2)$.

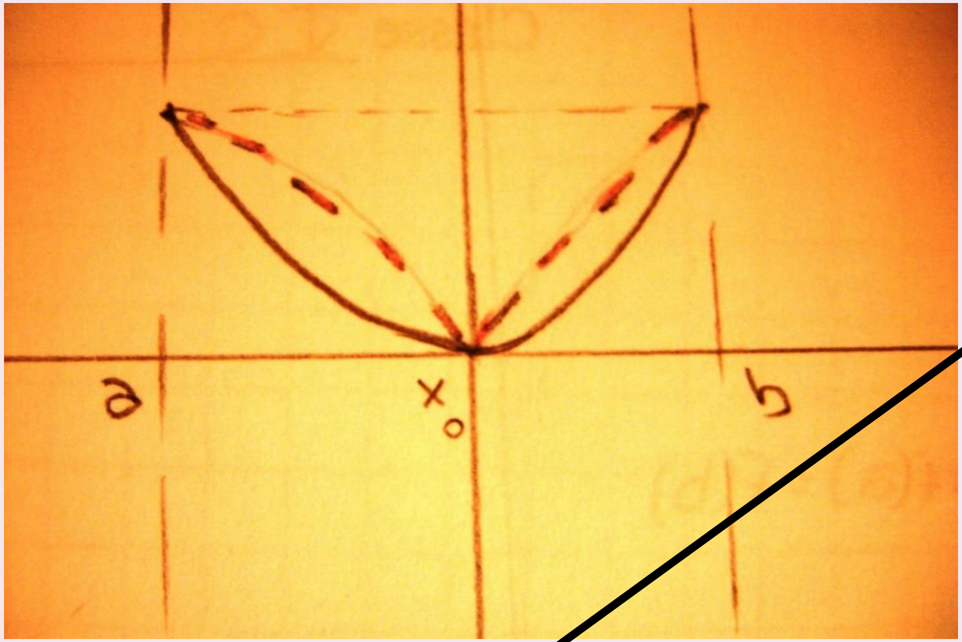
Costruisci, se possibile, una funzione f continua su [a,b] e derivabile sull'aperto (a,b) tale che f(a)=f(b) e f'(x) sia diversa da zero per ogni x.

Costruisci, se possibile, una funzione f continua su [a,b] e derivabile sull'aperto (a,b) tale che f(a)=f(b) e f'(x) sia diversa da zero per ogni x.



Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere f(a)=f(b). Non può essere un segmento parallelo all'asse x perché la derivata sarebbe 0.*

Costruisci, se possibile, una funzione f continua su [a,b] e derivabile sull'aperto (a,b) tale che f(a)=f(b) e f'(x) sia diversa da zero per ogni x.



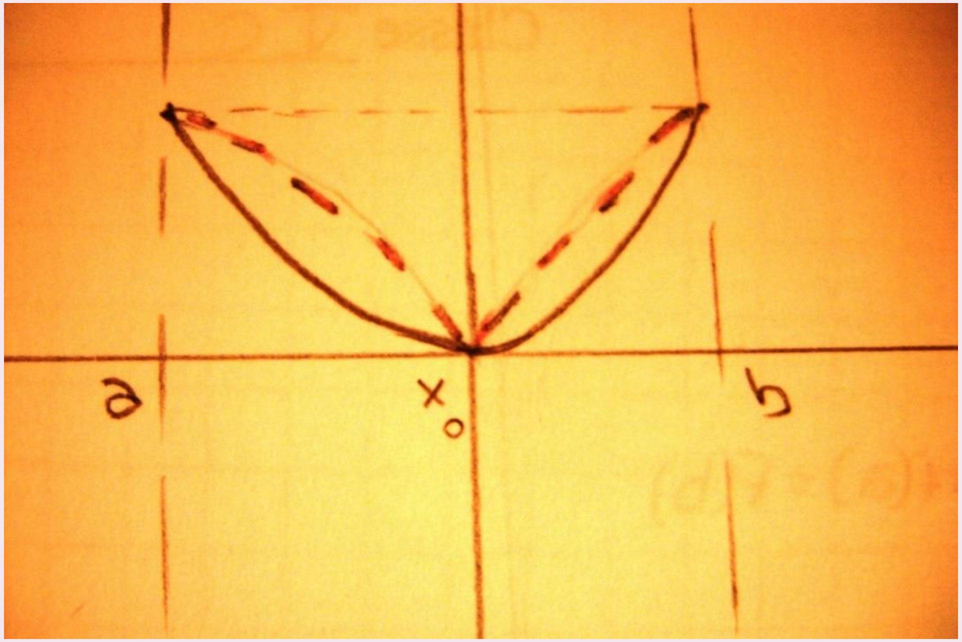
Non è possibile costruire l'esempio

Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere f(a)=f(b). Non può essere un segmento parallelo all'asse x perché la derivata sarebbe 0.*

Dimostrazione classica:

f costante

f non costante quindi max o min interno ad [a,b]



Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere f(a)=f(b). Non può essere un segmento parallelo all'asse x perché la derivata sarebbe 0.*

Resnick and Greeno (Resnick & Greeno 1990; Resnick, 1992; Greeno, 1991): l’acquisizione dei concetti è fortemente legata alle azioni sugli oggetti

Piaget (1964): *To know an object is to act on it. To know it is to modify, to transform the object and to understand the process of this transformation and, as a consequence, to understand the way the object is constructed*

Educare alla razionalità, in ricordo di Paolo Gentilini

Sestri Levante, 9-11 giugno 2016

Congetturare e argomentare tra esempi e contro-esempi

Samuele Antonini
Università di Pavia