# Un calcolo deduttivo per la teoria ingenua degli insiemi

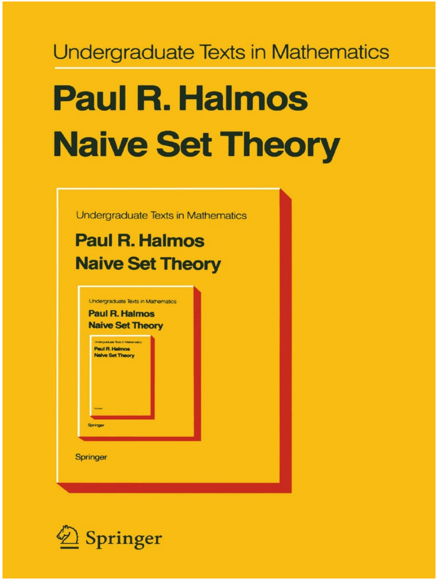
Giuseppe Rosolini
da un’università ligure

**Educare alla razionalità**

**9-11 Giugno 2016, Sestri Levante**

in ricordo di Paolo Gentilini

**Non è quella in**



Ma è **questa**:

$\{x < 3\}$ è infinito

$\{x \leq 3\} \cap \{x > 2\} = \{3\}$

$\{x = 3, y = 5\}$ ha un elemento

$\{x = 3, x = 5\}$ non è vuoto

$\{\emptyset\}$ è vuoto

Ma è **questa**:

$\{x < 3\}$ è infinito
Il contesto suggerisce che la lettera $x$ viene usata per indicare arbitrari numeri reali.

$\{x \leq 3\} \cap \{x > 2\} = \{3\}$
Il contesto suggerisce che la lettera $x$ viene usata per indicare arbitrari numeri interi.

$\{x = 3, y = 5\}$ ha un elemento
Le lettere $x$ e $y$ compaiono come variabili in un sistema lineare.
La virgola separa due frasi coordinate.

$\{x = 3, x = 5\}$ non è vuoto
La lettera $x$ compare come variabile in un'equazione di secondo grado. La virgola separa due casi alternativi.

$\{\emptyset\}$ è vuoto
"Il segno $\emptyset$ indica che non c'è nulla, un elenco vuoto; in più, gli elementi di un insieme stanno sempre tra parentesi graffe."

# Il metodo assiomatico


«I teorici del metodo [assiomatico] si sono resi conto che la matematica [. . . ] è un discorso che non si riferisce a enti dello spazio fisico naturale né a sostanze nascoste, ma che, strutturandosi [. . . ] come un discorso grazie alla costruzione di linguaggi sintatticamente corretti, si presenta come una griglia da imporre, volendo, su diverse realtà. Questo è vero [. . . ] fin da quando Aristotele ha incominciato a usare le lettere *A*, . . . per indicare proposizioni qualunque: non c'è alcuna matematica ereditata che non si possa leggere come discorso formale, anche se chi la faceva la pensava diversamente.»

# Il calcolo deduttivo $\mathcal{ET}$

tipi: $S$ $\qquad \mathscr{P}(S_1, \ldots, S_n)$

costruttori: $\top \qquad \wedge \qquad = \qquad (\textvisiblespace, \ldots) \in \textvisiblespace \qquad \{(\textvisiblespace, \ldots) \mid \textvisiblespace\}$

termini:
una variabile $x \colon S$ è un termine

$\top \colon \mathscr{P}()$ è un termine

se $\phi \colon \mathscr{P}()$ è un termine, allora
$$\{(x_1 \colon S_1, \ldots, x_n \colon S_n) \mid \phi\} \colon \mathscr{P}(S_1 \ldots, S_n) \text{ è un termine}$$

se $t \colon S$ e $s \colon S$ sono termini, allora $t = s \colon \mathscr{P}()$ è un termine

se $\phi \colon \mathscr{P}()$ e $\psi \colon \mathscr{P}()$ sono termini, allora $\phi \wedge \psi \colon \mathscr{P}()$ è un termine

se $t_1 \colon S_1, \ldots, t_n \colon S_n$ e $t \colon \mathscr{P}(S_1, \ldots, S_n)$ sono termini, allora
$$(t_1, \ldots, t_n) \in t \colon \mathscr{P}() \text{ è un termine}$$

formule: i termini di tipo $\mathscr{P}()$

tipi: $S$ $\mathscr{P}(S_1,\ldots,S_n)$

costruttori: $\top$ $\wedge$ $=$ $(\sqcup,\ldots)\in\sqcup$ $\{(\sqcup,\ldots)\mid\sqcup\}$

termini:
una variabile $x\colon S$ è un termine

$\top\colon\Omega$ è un termine

se $\phi\colon\Omega$ è un termine, allora
$\{(x_1\colon S_1,\ldots,x_n\colon S_n)\mid\phi\}\colon\mathscr{P}(S_1,\ldots,S_n)$ è un termine

se $t\colon S$ e $s\colon S$ sono termini, allora $t=s\colon\Omega$ è un termine

se $\phi\colon\Omega$ e $\psi\colon\Omega$ sono termini, allora $\phi\wedge\psi\colon\Omega$ è un termine

se $t_1\colon S_1,\ldots,t_n\colon S_n$ e $t\colon\mathscr{P}(S_1,\ldots,S_n)$ sono termini, allora
$(t_1,\ldots,t_n)\in t\colon\Omega$ è un termine

formule: i termini di tipo $\Omega$

# La teoria ingenua degli insiemi, di nuovo

$$\{x < 3\} = \{(x : \mathbb{R}) \mid x < 3\}$$

$$\{x \leq 3\} \cap \{x > 2\} = \{(x : \mathbb{Z}) \mid x \leq 3\} \cap \{(x : \mathbb{R}) \mid x > 2\}$$

$$\{x = 3, y = 5\} = \{(x : \mathbb{R}, y : \mathbb{R}) \mid x = 3 \land y = 5\}$$

$$\{x = 3, x = 5\} = \{(x : \mathbb{R}) \mid x = 3 \lor x = 5\}$$

$$\{\varnothing\} = \{(x : \mathscr{P}(\mathbb{N})) \mid x = \varnothing\} \qquad \varnothing = \{(x : \mathscr{P}(\mathbb{N})) \mid \neg x = x\}$$

# La teoria ingenua degli insiemi, di nuovo

$$\{x < 3\} = \{x\colon \mathbb{R} \mid x < 3\}$$

$$\{x \leq 3\} \cap \{x > 2\} = \{x\colon \mathbb{Z} \mid x \leq 3\} \cap \{x\colon \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

$$\{x = 3, y = 5\} = \{(x\colon \mathbb{R}, y\colon \mathbb{R}) \mid x = 3 \wedge y = 5\}$$

$$\{x = 3, x = 5\} = \{x\colon \mathbb{R} \mid x = 3 \vee x = 5\}$$

$$\{\varnothing\} = \{x\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \mid x = \varnothing\}$$

$$\varnothing = \{x\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \mid \neg x = x\}$$

# Il calcolo deduttivo $\mathcal{ET}$ in formato "multiformula ⊢ formula"

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y},\vec{z}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \alpha \quad \Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\vec{y},x:S} \phi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi[t/x]} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} t = t} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} t = s \quad \Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi[t/x]}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi[s/x]}$$

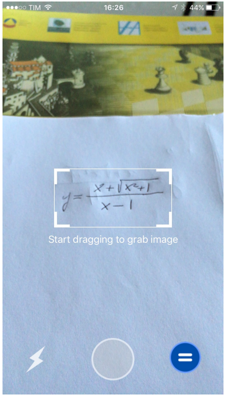
$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \quad \Gamma \vdash_{\vec{y}} \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \wedge \psi}$$

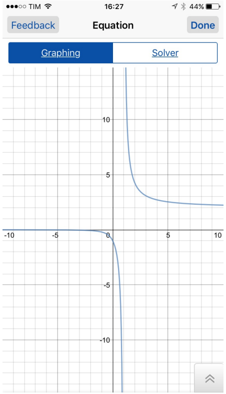
$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \Big[(x_1, \ldots, x_n) \in \{(x_1 : S_1, \ldots, x_n : S_n) \mid \phi\}\Big] = \phi}$$

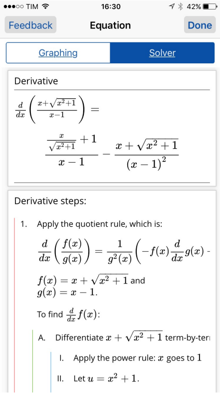
$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma, (x_1, \ldots, x_n) \in t_1 \vdash_{\vec{y}, x_1:S_1, \ldots x_n:S_n} (x_1, \ldots, x_n) \in t_2 \\ \qquad\qquad \Gamma, (x_1, \ldots, x_n) \in t_2 \vdash_{\vec{y}, x_1:S_1, \ldots x_n:S_n} (x_1, \ldots, x_n) \in t_1\end{array}}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} t_1 = t_2}$$

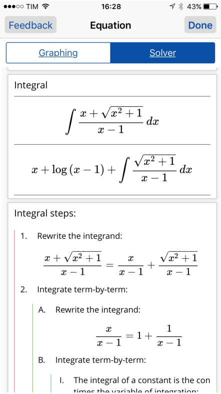
Boileau, A., Joyal, A.
La logique des topos *J. Symb. Logic* 4 (1981)

# A che cosa serve un calcolo deduttivo



## Il calcolo deduttivo $\mathcal{ET}$ con le scatole di Fitch

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y},\vec{z}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \alpha \quad \Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \quad \Gamma \vdash_{\vec{y}} \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \wedge \psi}$$

---

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \top \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdots \\ \phi \wedge \psi \\ \vdots \\ \phi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdots \\ \phi \wedge \psi \\ \vdots \\ \psi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdots \\ \phi \\ \vdots \\ \psi \\ \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{array}$$

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y},\vec{z}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \alpha \quad \Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}, x:S} \phi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi[t/x]} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} t = t} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} t = s \quad \Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi[t/x]}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi[s/x]}$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \boxed{\begin{array}{l} x : S \\ \vdots \\ \phi \end{array}} \\ \phi[t/x] \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdots \\ t = t \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdots \\ t = s \\ \vdots \\ \phi[t/x] \\ \vdots \\ \phi[s/x] \end{array}$$

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y},\vec{z}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \alpha \quad \Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \left[(x_1, \ldots, x_n) \in \{(x_1 {:} S_1, \ldots, x_n {:} S_n) \mid \phi\}\right] = \phi}$$

$$\frac{\Gamma, (x_1, \ldots, x_n) \in t_1 \vdash_{\vec{y}, x_1:S_1, \ldots x_n:S_n} (x_1, \ldots, x_n) \in t_2 \qquad \Gamma, (x_1, \ldots, x_n) \in t_2 \vdash_{\vec{y}, x_1:S_1, \ldots x_n:S_n} (x_1, \ldots, x_n) \in t_1}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} t_1 = t_2}$$

$\vdots$

$\phi = ((x_1, \ldots) \in \{(x_1 {:} S_1, \ldots) \mid \phi\})$

$\vdots$

| |
|---|
| $x_1 {:} S_1, \ldots, x_n {:} S_n$ |
| $(x_1, \ldots, x_n) \in t_1$ |
| $\vdots$ |
| $(x_1, \ldots, x_n) \in t_2$ |

| |
|---|
| $x_1 {:} S_1, \ldots, x_n {:} S_n$ |
| $(x_1, \ldots, x_n) \in t_2$ |
| $\vdots$ |
| $(x_1, \ldots, x_n) \in t_1$ |

# Il calcolo deduttivo $\mathcal{ET}$ con le scatole di Fitch

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y},\vec{z}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \alpha \quad \Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} x \in \{x\colon S \mid \phi\} = \phi} \qquad \frac{\Gamma, x \in t_1 \vdash_{\vec{y},x:S} x \in t_2 \quad \Gamma, x \in t_2 \vdash_{\vec{y},x:S} x \in t_1}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} t_1 = t_2}$$

---

$$\vdots$$
$$x \in \{x\colon S \mid \phi\} = \phi$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x\colon S \\ x \in t_1 \\ \vdots \\ x \in t_2 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x\colon S \\ x \in t_2 \\ \vdots \\ x \in t_1 \end{array}}$$

$$t_1 = t_2$$

# Il calcolo deduttivo $\mathcal{ET}$ con le scatole di Fitch

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y},\vec{z}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \alpha \quad \Gamma, \alpha \vdash_{\vec{y}} \beta}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \beta}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} () \in \{() \mid \phi\} = \phi} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \psi \quad \Gamma, \psi \vdash_{\vec{y}} \phi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi = \psi}$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ () \in \{() \mid \phi\} = \phi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdots \\ \boxed{\begin{array}{l} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{l} \psi \\ \vdots \\ \phi \end{array}} \\ \phi = \psi \end{array}$$

# Gli altri connettivi e quantificatori

$$\phi \to \psi \stackrel{\text{def}}{=} [(\phi \wedge \psi) = \phi]$$

$$\phi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} [(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)]$$

$$\forall_{x:S}\ \ \phi \stackrel{\text{def}}{=} [\{x : S \mid \phi\} = \{x : S \mid \top\}]$$

$$\bot \stackrel{\text{def}}{=} [\forall_{w:\Omega}\ \ (w = \top)]$$

$$\phi \vee \psi \stackrel{\text{def}}{=} [\forall_{w:\Omega}\ \ [((\phi \to w) \wedge (\psi \to w)) \to (w = \top)]]$$

$$\neg\phi \stackrel{\text{def}}{=} [\phi \to \bot]$$

$$\exists_{x:S}\ \ \phi \stackrel{\text{def}}{=} [\forall_{w:\Omega}\ \ [(\forall_{x:S}\ \ (\phi \to w)) \to (w = \top)]]$$

# Le proprietà degli altri connettivi e quantificatori

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \to \psi} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \phi \to \psi}{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi = \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi = \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \leftrightarrow \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}, x:S} \phi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \forall_{x:S} \ \phi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \forall_{x:S} \ \phi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi[t/x]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \bot}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \theta \quad \Gamma, \psi \vdash_{\vec{y}} \theta}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash_{\vec{y}} \theta}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \bot}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \neg \phi} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \neg \phi}{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \bot}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}, x:S} \theta}{\Gamma, \exists_{x:S} \ \phi \vdash_{\vec{y}} \theta} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi[t/x]}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \exists_{x:S} \ \phi}$$

# Le proprietà degli altri connettivi e quantificatori

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \psi}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi \to \psi}$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vec{y}, \Gamma$ | Ipotesi principali |
| 2. | $\phi \wedge \psi$ | ipotesi interna |
| 3. | $\phi$ | $\wedge$-E1 da riga 2 |
| 4. | $\phi$ | ipotesi interna |
| $\vdots$ | | inserimento della dimostrazione di $\Gamma, \phi \vdash_{\vec{y}} \psi$ |
| $\ell$. | $\psi$ | |
| $\ell + 1$. | $\phi \wedge \psi$ | $\wedge$-I dalle righe 5 e 7 |
| $\ell + 2$. | $(\phi \wedge \psi) = \psi$ | eguaglianza per formule |
| $\ell + 3$. | $\phi \to \psi$ | definizione di $\to$ |

Si è precedentemente dimostrato che, fissati arbitrari $\vec{y}$, da $\Gamma$ e $\phi$ si ottiene $\psi$.

Fissati ora $\vec{y}$ arbitrari, si supponga $\Gamma$.

Intendendo dimostrare che $(\phi \wedge \psi) = \phi$ mediante la regola per l'eguaglianza di formule, si nota dapprima che $\phi$ discende direttamente dall'ipotesi $\phi \wedge \psi$.

Del resto, dall'ipotesi $\phi$, avendo anche $\Gamma$ tra le ipotesi sopra, si ottiene $\psi$ grazie alla dimostrazione disponibile inizialmente di $\psi$ da $\Gamma$ e $\phi$.

Da questo discende che $\phi \wedge \psi = \phi$, che è la tesi per definizione di $\phi \to \psi$.

# Ulteriori regole

$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash_{\vec{y}} \bot}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \phi}$$

Per Assurdo

$$\frac{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \exists_{x:S}\ \ x \in t}{\Gamma \vdash_{\vec{y}} \varepsilon(t) \in t}$$

Assioma di Scelta

$$\frac{t \colon \mathscr{P}(S)}{\varepsilon(t) \colon S}$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \boxed{\begin{array}{l} \neg\phi \\ \vdots \\ \bot \end{array}} \\ \phi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \exists_{x:S}\ \ x \in t \\ \vdots \\ \varepsilon(t) \in t \end{array}$$

# La regola Per Assurdo discende dall'Assioma di Scelta

Sia $v : \Omega$.

Si introducono gli insiemi

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \{w : \Omega \mid (w = \bot) \vee [(w = \top) \wedge v]\}$$

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \{w : \Omega \mid [(w = \bot) \wedge v] \vee (w = \top)\}$$

# La regola Per Assurdo discende dall'Assioma di Scelta

Sia $v \colon \Omega$.

Si introducono gli insiemi

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \{w \colon \Omega \mid (w = \bot) \vee [(w = \top) \wedge v]\}$$

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \{w \colon \Omega \mid [(w = \bot) \wedge v] \vee (w = \top)\}$$

Si notano i seguenti fatti:

$$\vdash_{\vec{y}} \neg(\bot = \top) \qquad \vdash_{\vec{y}} (\phi = \top) \longleftrightarrow \phi \qquad \vdash_{\vec{y}} (\phi \wedge \top) = \phi$$

Dato che $\vdash_{v:\Omega} \varepsilon(\Phi) \in \Phi$ e $\vdash_{v:\Omega} \varepsilon(\Psi) \in \Psi$, si ha che

$$\vdash_{v:\Omega} \varepsilon(\Phi) = \varepsilon(\Psi) \vee \neg\varepsilon(\Phi) = \varepsilon(\Psi)$$

Si vede facilmente che $v \vdash_{v:\Omega} \varepsilon(\Phi) = \varepsilon(\Psi)$.

Ma si dimostra anche che $\varepsilon(\Phi) = \varepsilon(\Psi) \vdash_{v:\Omega} v$.

Dunque $\vdash_{v:\Omega} v \longleftrightarrow \varepsilon(\Phi) = \varepsilon(\Psi)$ e si conclude.