Qualche esercizio

Esercizio 2. *Derivare in LK le formule seguenti:*

1. $(A \to B) \vee (B \to A)$, *dove* A *e* B *sono formule qualsiasi*
2. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$, *dove* P *e* Q *sono due variabili speciali per predicati di arietà* 1
3. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$, *dove* P *e* Q *sono due variabili speciali per predicati di arietà* 1

Esercizio 3. *Siano* P *e* Q *due variabili speciali per predicato di arietà* 1, *sia* R *una variabile speciale per predicato di arietà* 2, *e sia* a *una variabile speciale individuale.*

1. *Derivare la formula* $\exists x Q(x)$ *a partire dalle ipotesi* $\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x, y)) \to Q(y))$, $\forall x R(x, x)$ *e* $P(a)$
2. *Derivare la formula* $\forall x Q(x)$ *a partire dalle ipotesi* $\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x, y)) \to Q(y))$, $\forall x R(a, x)$ *e* $P(a)$
3. *Derivare la formula* $\exists x \forall y R(y, x)$ *a partire dalle ipotesi* $\forall x \forall y((P(x) \wedge Q(y)) \to R(x, y))$, $\forall x P(x)$ *e* $\exists x Q(x)$
4. *Derivare la formula* $\exists x Q(x)$ *a partire dalle ipotesi* $\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x, y)) \to Q(y))$, $\forall x \exists y R(x, y)$ *e* $\exists x P(x)$

Esercizio 4. *Sia* R *una variabile speciale per predicato di arietà* 2.

1. *Derivare* $\forall y \exists x R(y, x)$ *a partire dall'ipotesi* $\exists x \forall y R(y, x)$. *È possibile derivare* $\exists x \forall y R(y, x)$ *a partire dall'ipotesi* $\forall y \exists x R(y, x)$*?*

2. *Derivare* $\forall x \exists y R(y,x)$ *a partire dalle ipotesi* $\forall x \exists y R(x,y)$ *e* $\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$

3. *Dimostrare che una relazione su di un insieme* M *che sia simmetrica, transitiva, e tale che ogni elemento di* M *sia in relazione con almeno un elemento di* M*, è una relazione riflessiva.*

Esercizio 5. *Derivare in* LK *le formule seguenti:*

1. $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$*, dove* P *è una variabile speciale per predicati di arietà* 1

2. $\exists x \forall y(((P(y) \to P(x)) \to P(x)) \to P(y))$*, dove* P *è una variabile speciale per predicati di arietà* 1

3. $\exists x \forall y((Q(y) \to P(x)) \to (Q(x) \to P(y)))$*, dove* P *e* Q *sono due variabili speciali per predicati di arietà* 1

Esercizio 6. *Supponiamo che:*

1. *Tutti i clienti hanno preso almeno un formaggio o un dolce;*

2. *Coloro che hanno preso un dolce hanno preso un caffè;*

3. *Coloro che hanno preso un caffè non hanno tutti preso un dolce.*

Possiamo dedurne che qualcuno ha preso un formaggio? E che qualcuno ha preso un dolce?

Esercizio 7. *Se in una certa città tutti i barbieri radono tutti e soli gli uomini che non radono sé stessi, cosa possiamo dedurre sul sesso dei barbieri della città?*

Esercizio 8. *Supponiamo che:*

- *Tutti conoscono qualcuno che conosce un iniziato*
- *Alberto non è un iniziato.*

Se ne deduca che esiste un non-iniziato che conosce un iniziato.

Esercizio 9. *Lo scopo dell'esercizio è dimostrare il* teorema di messa in forma normale prenessa*:*

<< Sia $\mathcal{L}$ *un linguaggio del primo ordine. Per qualunque formula* F *di* $\mathcal{L}$*, esiste una formula* G *tale che:*

- *è derivabile il sequente* $\vdash F \leftrightarrow G$*;*
- G *è in* forma normale prenessa*:* $G = Q_1x_1 \dots Q_nx_nG'$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ *e* G' *è una formula senza quantificatori;*
- *se la variabile* z *occorre libera in* G*, allora* z *occorre libera anche in* F*. >>*

1. *Siano* P *e* Q *due predicati unari. Dimostrare (in LK) che la formula* $\forall xP(x) \vee Q(y)$ *equivale a* $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ *e che la formula* $\exists xP(x) \vee Q(y)$ *equivale a* $\exists x(P(x) \vee Q(y))$*. Osservare che se* z *occorre libera in* $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ *(risp. in* $\exists x(P(x) \vee Q(y))$*), cioè se* $z = y$*, allora* z *occorre libera anche in* $\forall xP(x) \vee Q(y)$ *(risp.* $\exists xP(x) \vee Q(y)$*).*

   Dimostrare che invece non è derivabile né $(\forall xP(x) \vee Q(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$ *né* $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee Q(x))$*. Per dimostrarlo, si potrà sfruttare l'equivalenza tra la derivabilità di una formula e quella della sua chiusura universale, e quindi, nel caso specifico, il fatto che se fosse derivabile* $(\forall xP(x) \vee Q(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$ *lo sarebbe anche* $\forall v((\forall xP(x) \vee Q(v)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x)))$*, e se fosse derivabile* $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee Q(x))$ *lo sarebbe anche* $\forall v(\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee Q(v)))$*.*

2. *Generalizzando la prima parte del Punto 1, dimostrare che se* A *e* B *sono due formule e se* x *non appare libera in* B*, allora sono derivabili i sequenti* $\vdash (\forall xA \vee B) \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$ *e* $\vdash (\exists xA \vee B) \leftrightarrow \exists x(A \vee B)$*. Osservare che se* z *occorre libera in* $\forall x(A \vee B)$ *(risp. in* $\exists x(A \vee B)$*), allora* z *occorre libera anche in* $\forall xA \vee B$ *(risp.* $\exists xA \vee B$*).*

3. *Generalizzare al caso di un numero di variabili qualsiasi e dimostrare che date* A *e* B *due formule tali che* $x_1, \dots, x_n$ *(risp.* $y_1, \dots, y_m$*) non appaiono libere in* B *(risp. in* A*), per ogni scelta di quantificatori* $Q_1, \dots, Q_n$ *e* $P_1, \dots, P_m$ *(*$Q_i, P_j \in \{\exists, \forall\}$*) è derivabile*

   $$\vdash (Q_1x_1 \dots Q_nx_nA \vee P_1y_1 \dots P_my_mB) \leftrightarrow Q_1x_1 \dots Q_nx_nP_1y_1 \dots P_my_m(A \vee B)$$

   ed anche

   $$\vdash (Q_1x_1 \dots Q_nx_nA \wedge P_1y_1 \dots P_my_mB) \leftrightarrow Q_1x_1 \dots Q_nx_nP_1y_1 \dots P_my_m(A \wedge B).$$

Osservare che se z occorre libera in $Q_1x_1 \dots Q_nx_nP_1y_1 \dots P_my_m(A \vee B)$ (risp. $Q_1x_1 \dots Q_nx_nP_1y_1 \dots P_my_m(A \wedge B)$), allora z occorre libera anche in $Q_1x_1 \dots Q_nx_nA \vee P_1y_1 \dots P_my_mB$ (risp. $Q_1x_1 \dots Q_nx_nA \wedge P_1y_1 \dots P_my_mB$).

4. *Dimostrare il teorema di messa in forma normale prenessa per induzione sulla complessità della formula F, sfruttando il Punto 3.*
5. *Sfruttando il Punto 2, fornire una dimostrazione alternativa della derivabilità della formula $\exists x(U(x) \to \forall y U(y))$.*
6. *Applicazione del teorema di messa in forma normale prenessa. Siano D, E, F, G, H, I formule senza quantificatori. Trovare, per le formule seguenti, una forma normale prenessa:*
   - *a)* $(A \wedge B) \to C$, *dove* $A = \exists x(\forall y D(x,y) \to E(x))$, $B = \forall x(F(z,x) \to \exists y G(x,y))$, $C = \exists y(H(y,x) \to \neg I(y,z))$;
   - *b)* $A \to B$, *dove* $A = \exists x(\forall y H(x,y) \to D(x))$ *e* $B = \exists x(E(y) \to (F(y,x) \to \neg G(y,z)))$.

Esercizio 10. *Si consideri il sottosistema moltiplicativo ed additivo $MALK$ del calcolo dei sequenti classico LK, definito come segue:*

- *le formule di $MALK$ sono le formule del calcolo proposizionale senza le costanti logiche, dove distinguiamo gli stili dei connettivi (e non piú solo delle regole): ad esempio $A \wedge_m B$ e $A \wedge_a B$ sono due formule diverse.*
- *le regole di $MALK$ sono l'assioma, il taglio, le regole logiche moltiplicative e le regole logiche additive.*

L'esercizio si propone di dimostrare che aggiungere a $MALK$ le regole strutturali equivale ad aggiungere a $MALK$ le due regole 0-arie R_1 ed R_2 che permettono il cambiamento di stile dei connettivi:

$$\frac{}{\vdash \neg A \vee_a \neg B, A \wedge_m B}\,R_1 \qquad \frac{}{\vdash \neg A \vee_m \neg B, A \wedge_a B}\,R_2$$

1. *Assumere che valga l'eliminabilità del taglio in $MALK$ (o alternativamente assumere il teorema di eliminazione del taglio e spiegare perché dal teorema di eliminazione del taglio per LK dimostrato a lezione discende immediatamente il teorema di eliminazione del taglio per $MALK$). Dedurne che non è dimostrabile in $MALK$ il sequente vuoto.*

2. *Dimostrare che anche in $MALK$ le regole $\vee_m$ e $\wedge_a$ sono reversibili.*
3. *Dimostrare che i sequenti $\vdash \neg A \vee_a \neg B, A \wedge_m B$ e $\vdash \neg A \vee_m \neg B, A \wedge_a B$ non sono derivabili in $MALK$.*
4. *Dimostrare che aggiungendo a $MALK$ le regole strutturali di indebolimento e contrazione, i sequenti $\vdash \neg A \vee_a \neg B, A \wedge_m B$ e $\vdash \neg A \vee_m \neg B, A \wedge_a B$ sono derivabili.*
5. *Dimostrare che aggiungendo le due regole* 0*-arie che autorizzano il cambiamento di stile, le regole strutturali diventano "derivabili", cioè se chiamiamo $MALK'$ il calcolo dei sequenti ottenuto a partire da $MALK$ aggiungendo le regole R_1 ed R_2, allora:*
   - *se $\vdash \Gamma$ è derivabile in $MALK'$, allora lo sarà anche $\vdash \Gamma, A$*
   - *se $\vdash \Gamma, A, A$ è derivabile in $MALK'$, allora lo sarà anche $\vdash \Gamma, A$.*

Esercizio 11. *Lo scopo dell'esercizio è dimostrare che se la formula A del primo ordine è derivabile in LK allora è possibile derivare A senza far uso della regola di indebolimento.*

1. *Dimostrare il seguente lemma, il quale afferma che un sequente derivabile in LK lo è anche mediante una derivazione che contiene solo indebolimenti terminali:*

   Lemma 7.1. *Ogni derivazione di $\vdash \Gamma$ in LK si può trasformare in una derivazione π di LK con la stessa conclusione $\vdash \Gamma$ e tale che:*
   - *esiste π_w sottoderivazione di π senza indebolimenti;*
   - *ogni regola di π che non è una regola di π_w è un indebolimento.*

   *[**Indicazione:** Procedere per induzione lessicografica sulla coppia $(\sharp_W(\pi), d_w(\pi))$, dove $\sharp_W(\pi)$ è il numero di indebolimenti presenti in π che non abbiano solo indebolimenti sotto di essi (cioè indebolimenti "fuori posto") e $d_w(\pi)$ è il minimo delle distanze tra un indebolimento (fuori posto) di π e la radice (la distanza è il numero di regole* diverse da indebolimenti *attraversate nella direzione dalla regola di indebolimento in esame verso la radice della derivazione).]*

2. *Dedurre dal punto precedente il risultato atteso: ogni formula del primo ordine è derivabile senza far uso della regola di indebolimento.*

Esercizio 12. *(Eliminazione del taglio per LK con l'idra) Lo scopo dell'esercizio è fornire una dimostrazione di eliminazione del taglio per LK (in cui le regole per* $\vee_m$ *e per* $\wedge_m$ *sono tutte moltiplicative oppure tutte additive) alternativa a quella del libro, sfruttando la buona fondatezza dell'ordine multinsiemistico sull'insieme* $\mathcal{M}_{fin}(\mathbb{N})$ *dei multinsiemi finiti di interi naturali. Rammentiamo che un multinsieme finito di interi naturali è una funzione* $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *quasi ovunque nulla, cioè* $\mu(a) = 0$ *salvo per un numero finito di interi naturali, e l'ordine* $<_m$ *tra multinsiemi di interi naturali è definito ponendo* $\mu <_m \nu$ *quando*

- $\mu = [\ ]$ *e* $\nu \neq [\ ]$

oppure

- $\mu \neq [\ ]$ *e* $\nu \neq [\ ]$ *ed esiste* $n \in \mathbb{N}$ *tale che*
  - $\mu(n) < \nu(n)$*;*
  - *per ogni* $m > n$ *vale* $\mu(m) = \nu(m)$*.*

Abbiamo dimostrato in un esercizio precedente che la relazione $<_m$ *è una relazione di buon ordine sull'insieme* $\mathcal{M}_{fin}(\mathbb{N})$*, e pertanto non esiste una catena discendente infinita di multinsiemi: non esiste una successione* $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *di multinsiemi tale che, per ogni* $i \in \mathbb{N}$*, vale* $\mu_{i+1} < \mu_i$*.*

1. *Per una derivazione* π *di* LK*, possiamo considerare il multinsieme* $Cut(\pi)$ *delle complessità delle formule di taglio contate il numero di volte in cui occorrono in* π*. Definire con precisione, per ogni derivazione* π *di* LK*, il multinsieme* $Cut(\pi)$*.*

2. *Definiamo ora un unico passo di riduzione* (R) *da applicare a qualunque taglio di tipo* (L) *oppure di tipo* (S_2)*. Se* c *è un tale taglio, il passo* (R) *applicato a* c *consiste:*
   - *in un passo* (L) *se* c *è un taglio logico;*

- *in un passo strutturale* (S) *se* c *è un taglio strutturale di tipo* (S_2)*, seguito però da tanti passi logici quanti sono i tagli (necessariamente tutti di tipo* (L)*) creati dalla riduzione del taglio* c*.*

Dimostrare che se π' *è ottenuta applicando un passo* (R) *ad un taglio logico*[1] *della derivazione* π*, allora* $Cut(\pi') <_m Cut(\pi)$*.*

3. *Considerare la derivazione* π *seguente:*

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\end{array}}{\vdash \Gamma, A}\,R_1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\end{array}}{\vdash \Delta, \neg A}\,R_2}{\vdash \Gamma, \Delta}\,c$$
$$\vdots$$

Supponendo che il taglio c *sia di tipo* (S_2)*, che* R_1 *sia una regola logica di conclusione principale* A e che π_1 sia senza tagli, *dimostrare che* $Cut(\pi') <_m Cut(\pi)$*, dove* π' *è la derivazione ottenuta applicando un passo* (R) *al taglio* c *di* π*.*
Dimostrare che invece non vale (in generale) $Cut(\pi'') <_m Cut(\pi)$*, dove* π'' *è la derivazione ottenuta applicando un passo* (S) *al taglio* c *di* π*.*

4. *Se* π *è una derivazione quasi senza tagli tale che la regola di taglio ha come formula principale una formula di grado zero, mostrare che applicando un passo* (S) *a* π *si ottiene una derivazione* π' *tale che* $Cut(\pi') <_m Cut(\pi)$*.*

5. *Se* π *è una derivazione quasi senza tagli tale che la regola di taglio è di tipo* (S_1) *e ha come formula principale una formula di grado non nullo, sfruttando il lemma di reversibilità si definisca un passo di riduzione che porti ad una derivazione* π' *tale che* $Cut(\pi') <_m Cut(\pi)$*.*

6. *Sfruttando quanto precede si definisca una procedura di eliminazione del taglio per LK in cui le regole per* $\vee_m$ *e per* $\wedge_m$ *sono tutte moltiplicative oppure tutte additive, e se ne dimostri la terminazione.*

[1] Siamo dunque nel caso particolare in cui il passo (R) è un passo (L).